

2 类优美图的冠的优美标号*

唐保祥¹, 任 韩²

(1. 天水师范学院数学与统计学院, 甘肃 天水 741001;

2. 华东师范大学数学系, 上海 200062)

摘要: 优美图是图论中重要的研究课题之一, 有着广泛的应用价值和研究前景。但是目前仍然很难从理论上对一般图的优美性进行研究。马克杰猜想: 所有优美图的冠都是优美图。这一猜想至今没有被证明或否定。对任何正整数 m 和 n , 用构造的方法给出了图 $I(1 - F_{m,4})$ 和 $I(K_{1,1,1,n})$ 的优美标号, 从而证明了 $I(1 - F_{m,4})$ 和 $I(K_{1,1,1,n})$ 都是优美图。

关键词: 优美图; 冠; 优美标号

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2015)05-0024-04

Graceful Labeling of the Corona for Two Kinds of Graceful Graphs

TANG Baoxiang¹, REN Han²

(1. School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui 741001, China;

2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: Graceful graph is one of the important research topics in graph theory with wide application and research prospects. But now it is still difficult to study the gracefulness of general graphs in theory. Ma Kejie conjecture is that all the coronas of graceful graph are graceful graphs. This conjecture has not been proved or denied. For any positive integers m and n , the constructor method gives graceful labeling of $I(1 - F_{m,4})$ and $I(K_{1,1,1,n})$, thus prove that $I(1 - F_{m,4})$ and $I(K_{1,1,1,n})$ are graceful graphs.

Key words: graceful graph; corona; graceful labeling

图的优美标号是目前图论研究的一个热点问题^[1-11], 它的研究成果已经应用于密码理论、天文学、导弹控制、雷达、通讯网络寻址、数据库管理等方面^[1-2]。文献 [1] 中给出了一个猜想: 任意优美图的冠是优美图。这一猜想至今未被证明或否定。本文证明了两类优美图的冠是优美图。

1 相关概念

定义 1^[1] 图 G 的每个顶点上都粘接 r 条悬挂边 ($r \geq 1$ 的整数) 得到的图, 叫做 G 的 r -冠。 G 的 1-冠称为 G 的冠, 记作 $I(G)$ 。

定义 2^[1] 设图 $G = (V, E)$, 若存单射 $\theta: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E(G)|\}$, 使得 $\forall e = uv \in E(G)$, 由 $\theta'(e) = |\theta(u) - \theta(v)|$ 导出双射 $\theta': E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$, 则称图 G 是优美图, θ 称为图 G 的一个优美标号, θ' 称为由 θ 导出的边标号。

文献 [1] 中把顺序有一个公共顶点的 m 个 4 圈 C_4 所形成的图记为 $F_{m,4}$ (如图 1 所示), $F_{m,4}$ 是优美图^[1]。设 $V(F_{m,4}) = \{u_0, u_1, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_m\}$, 将顶点 p_i 与图 $F_{m,4}$ 的顶点 v_i 和 w_i 分别连接一条边 ($i = 1, 2, \dots, m$) 得到的图记为 $1 - F_{m,4}$ (如图 2 所示)。

* 收稿日期: 2015-01-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11171114)

作者简介: 唐保祥 (1961 年生), 男; 研究方向: 图论和组合数学; E-mail: tbx0618@sina.com

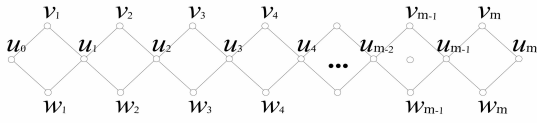


图 1 $F_{m,4}$ 图

Fig. 1 Figure of $F_{m,4}$

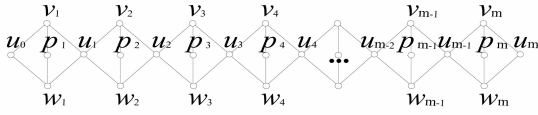


图 2 $1 - F_{m,4}$ 图

Fig. 2 Figure of $1 - F_{m,4}$

2 主要结果及其证明

定理 1 $\forall m \in \mathbf{Z}^+$, 图 $1 - F_{m,4}$ 是优美图。

证明 根据图 $1 - F_{m,4}$ 的定义, $|E(1 - F_{m,4})| = 6m$, $|V(1 - F_{m,4})| = 4m + 1$, 定义图 $1 - F_{m,4}$ 顶点的标号 θ 如下:

$$\theta(u_i) = 2i, i = 0, 1, \dots, m;$$

$$\theta(p_i) = 2i - 1, i = 1, \dots, m;$$

$$\theta(v_i) = 6m - 4(i - 1), i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\theta(w_i) = 6m - 3 - 4(i - 1), i = 1, 2, \dots, m$$

例如, 图 $1 - F_{6,4}$ 的优美标号图 3 所示。

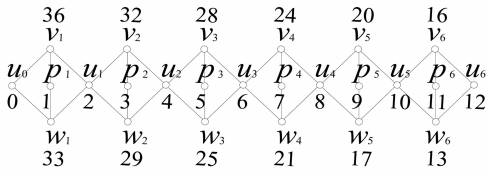


图 3 图 $1 - F_{6,4}$ 的优美标号

Fig. 3 Graceful labeling of graph $1 - F_{6,4}$

令 $S_1 = \{\theta(u_i) \mid i = 0, 1, \dots, m\}$, $S_2 = \{\theta(p_i) \mid i = 1, 2, \dots, m\}$,

$S_3 = \{\theta(v_i) \mid i = 1, 2, \dots, m\}$, $S_4 = \{\theta(w_i) \mid i = 1, 2, \dots, m\}$ 。

因为 $S_1 \cup S_2 = \{0, 1, 2, \dots, 2m\}$, $\min S_3 = 2m + 4$, $\min S_4 = 2m + 1$, $\max(S_1 \cup S_2) = 2m - 1$, 所以 $S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j$. 因此, 映射 $\theta: V(1 - F_{m,4}) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 6m\}$ 是单射。

显然 $\theta(v_1) - \theta(u_0)$, $\theta(v_1) - \theta(p_1)$, $\theta(v_1) - \theta(u_1)$, $\theta(w_1) - \theta(u_0)$, $\theta(w_1) - \theta(p_1)$, $\theta(w_1) - \theta(u_1)$, $\theta(v_2) - \theta(u_1)$, $\theta(v_2) - \theta(p_2)$, $\theta(v_2) -$

$\theta(u_2)$, $\theta(w_2) - \theta(u_1)$, $\theta(w_2) - \theta(p_2)$, $\theta(w_2) - \theta(u_2)$, \dots , $\theta(v_m) - \theta(u_{m-1})$, $\theta(v_m) - \theta(p_m)$, $\theta(v_m) - \theta(u_m)$, $\theta(w_m) - \theta(u_{m-1})$, $\theta(w_m) - \theta(p_m)$, $\theta(w_m) - \theta(u_m)$ 是首项为 $6m$, 尾项是 1, 公差是 1 的等差数列, 所以 $\theta': E(1 - F_{m,4}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 6m\}$ 是双射, 因此 θ 是图 $1 - F_{m,4}$ 的一个优美标号, 图 $1 - F_{m,4}$ 是优美图。证毕。

定理 2 $\forall m \in \mathbf{Z}^+$, 图 $1 - F_{m,4}$ 的冠 $I(1 - F_{m,4})$ 是优美图。

证明 根据图 $I(1 - F_{m,4})$ 的定义, $|V(I(1 - F_{m,4}))| = 8m + 2$, $|E(I(1 - F_{m,4}))| = 10m + 1$ 。

设 $V(I(1 - F_{m,4})) = \{u_0, u_1, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_m, w_1, w_2, \dots, w_m, p_1, p_2, \dots, p_m, q_1, q_2, \dots,$

$q_m, x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m, r_0, r_1, r_2, \dots, r_m\}$, 如图 4 所示。

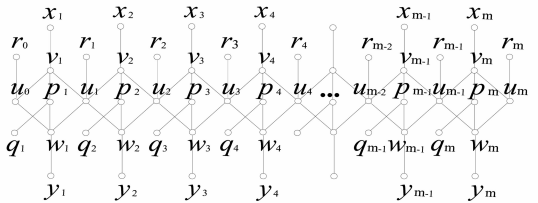


图 4 $I(1 - F_{m,4})$ 图

Fig. 4 Figure of $I(1 - F_{m,4})$

定义图 $I(1 - F_{m,4})$ 顶点的标号 θ 如下:

$$\theta(u_i) = 6i, i = 0, 1, \dots, m; \theta(p_i) = 2 + 6(i - 1), i = 1, \dots, m;$$

$$\theta(v_i) = 10m - 1 - 4(i - 1), i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\theta(w_i) = 10m - 4(i - 1), i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\theta(q_i) = 10m - 6 - 4(i - 1), i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\theta(x_i) = 3 + 6(i - 1), i = 1, \dots, m;$$

$$\theta(y_i) = 5 + 6(i - 1), i = 1, \dots, m; \theta(r_i) = 10m + 1 - 4i, i = 0, 1, \dots, m$$

例如, 图 $I(1 - F_{6,4})$ 的优美标号如图 5 所示。

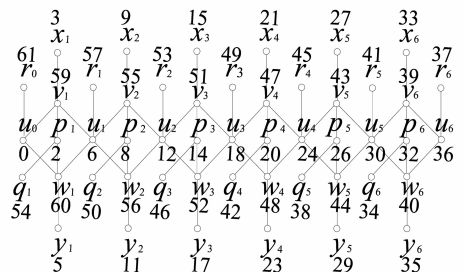


图 5 图 $I(1 - F_{m,4})$ 的优美标号

Fig. 5 Graceful labeling of graph $I(1 - F_{m,4})$

令 $S_1 = \{\theta(u_i) \mid i = 0, 1, \dots, m\}$, $S_2 = \{\theta(p_i) \mid i = 1, 2, \dots, m\}$, $S_3 = \{\theta(v_i) \mid i = 1, 2, \dots, m\}$, $S_4 = \{\theta(w_i) \mid i = 1, 2, \dots, m\}$, $S_5 = \{\theta(q_i) \mid i = 1, 2, \dots, m\}$, $S_6 = \{\theta(x_i) \mid i = 1, 2, \dots, m\}$, $S_7 = \{\theta(y_i) \mid i = 1, 2, \dots, m\}$, $S_8 = \{\theta(r_i) \mid i = 0, 1, 2, \dots, m\}$, 则 $\max S_1 = 6m$, $\max S_2 = 6(m - 1) + 2$, $\min S_3 = 6m + 3$, $\min S_4 = 6m + 4$, $\min S_5 = 6m - 2$, $\max S_6 = 6m - 3$, $\max S_7 = 6m - 1$, $\min S_8 = 6m + 1$, 所以 $S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j, i, j \in \{1, 2, \dots, 8\}$ 。因此, 映射 $\theta: V(I(1 - F_{m,4})) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 10m + 1\}$ 是单射。

因为 $\theta(r_{i-1}) - \theta(u_{i-1}), \theta(w_i) - \theta(u_{i-1}), \theta(v_i) - \theta(u_{i-1}), \theta(w_i) - \theta(p_i), \theta(v_i) - \theta(p_i), \theta(v_i) - \theta(u_i), \theta(w_i) - \theta(y_i), \theta(w_i) - \theta(u_i), \theta(v_i) - \theta(u_i), \theta(q_i) - \theta(p_i) (i = 1, 2, \dots, m), \theta(r_m) - \theta(u_m)$, 是首项为 $10m + 1$, 尾项是 1, 公差是 1 的等差数列, 故 $\theta': E(I(1 - F_{m,4})) \rightarrow \{1, 2, \dots, 10m + 1\}$ 是双射, 从而 θ 是图 $I(1 - F_{m,4})$ 的一个优美标号, 图 $I(1 - F_{m,4})$ 是优美图。证毕。

文献 [3] 证明了: 对任意正整数 n , 完全 4 部图 $K_{1,1,1,n}$ 是优美图。例如, 图 $K_{1,1,1,7}$ 的优美标号如图 6 所示。

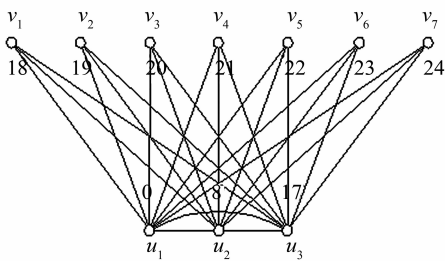


图 6 图 $K_{1,1,1,7}$ 的优美标号

Fig. 6 Graceful labeling of the graph $K_{1,1,1,7}$

定理 3 $\forall n \in \mathbf{Z}^+$, 完全 4 部图 $K_{1,1,1,n}$ 的冠 $I(K_{1,1,1,n})$ 是优美图。

证明 易知 $|V(I(K_{1,1,1,n}))| = 2n + 3$, $|E(I(K_{1,1,1,n}))| = 4n + 6$ 。设 $V(I(K_{1,1,1,n})) = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_n, x_1, x_2, x_3\}$, 如图 7 所示。

定义图 $I(K_{1,1,1,n})$ 顶点的标号 θ 如下:

$$\begin{aligned} \theta(u_0) &= 0; \theta(u_1) = n + 1; \theta(u_3) = 3n + 6; \\ \theta(x_1) &= n + 2; \theta(x_2) = 3n + 5; \theta(x_3) = n + 3; \\ \theta(v_i) &= 3n + 7 + (i - 1), i = 1, 2, \dots, n; \\ \theta(w_i) &= n + 5 + 2(i - 1), i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

例如, 图 $I(K_{1,1,1,7})$ 的优美标号图 8 所示。

令 $S_1 = \{\theta(v_i) \mid i = 0, 1, \dots, n\} \cup \{\theta(x_2),$

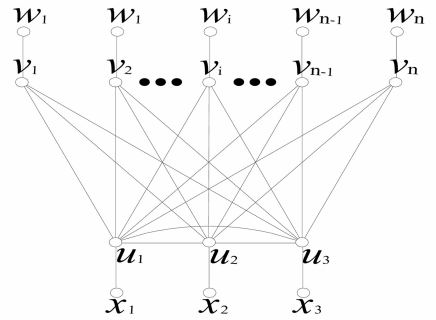


图 7 图 $I(K_{1,1,1,n})$

Fig. 7 Figure of $I(K_{1,1,1,n})$

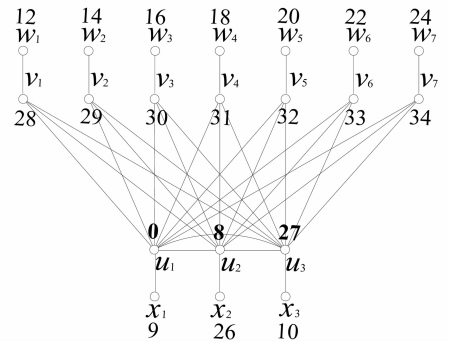


图 8 图 $I(K_{1,1,1,7})$ 的优美标号

Fig. 8 Graceful labeling of graph $I(K_{1,1,1,7})$

$\theta(u_3)\} = \{3n + 5, 3n + 6, 3n + 7, \dots, 4n + 6\}$, $S_2 = \{\theta(u_1), \theta(u_2), \theta(x_1), \theta(x_3)\} = \{0, n + 1, n + 2, n + 3\}$, $S_3 = \{\theta(w_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\} = \{n + 5, n + 7, n + 9, \dots, 3n + 3\}$, 则 $S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j$ 。因此, 映射 $\theta: V(I(1 - F_{m,4})) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 10m + 1\}$ 是单射。

因为 $\theta(v_1) - \theta(u_3), \theta(v_2) - \theta(u_3), \dots, \theta(v_n) - \theta(u_3), \theta(u_2) - \theta(u_1), \theta(x_1) - \theta(u_1), \theta(v_n) - \theta(w_n), \theta(v_{n-1}) - \theta(w_{n-1}), \dots, \theta(v_1) - \theta(w_1), \theta(u_3) - \theta(x_3), \theta(x_2) - \theta(u_2), \theta(u_3) - \theta(u_2), \theta(v_i) - \theta(u_2) (i = 1, 2, \dots, m), \theta(u_3) - \theta(u_1), \theta(v_i) - \theta(u_1) (i = 1, 2, \dots, m)$, 是首项为 1, 尾项是 $4n + 6$, 公差是 1 的等差数列, 故 $\theta': E(I(1 - F_{m,4})) \rightarrow \{1, 2, \dots, 10m + 1\}$ 是双射, 从而 θ 是图 $I(K_{1,1,1,n})$ 的一个优美标号, 图 $I(K_{1,1,1,n})$ 是优美图。证毕。

参考文献:

[1] 马克杰. 优美图[M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.
 [2] ALON N. Combinatorics, probability and computing [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999, 150 - 236.
 [3] 唐保祥. 关于 $K_{1,2,n}$ 和 $K_{1,1,1,n}$ 的优美性[J]. 上海师范大学学报: 自然科学版, 1996, 24(4): 33 - 35.

- [4] GALLIAN J A. A dynamic survey of graph labeling [J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2013, 19, DS6: 1 – 306.
- [5] ZHOU X Q, YAO B, CHEN X E, et al. A proof to the odd-gracefulness of all lobsters [J]. Ars Combinatorial, 2012, 103: 13 – 18.
- [6] KATHIESAN K M. Two classes of graceful graphs [J]. Ars Combinatorial, 2000, 22: 491 – 504.
- [7] 孙彩云, 王涛. 非连通图 $(K_1 \vee (P_n^1 \cup P_n^2)) \cup P_n^3$ 及 $(K_1 \vee (P_n^1 \cup P_n^2)) \cup \text{St}(n)$ 的优美性[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2014, 53(3): 52 – 56.
- [8] 孙宗剑, 黎贞崇, 罗海鹏, 等. 升降梯图 L_{3m+n+1} 的优美性[J]. 计算机应用研究, 2007, 24(12): 132 – 133.
- [9] 容青, 熊冬春. $P_{2r,b}$ 图的优美性[J]. 系统科学与数学, 2010, 30(5): 703 – 709.
- [10] 唐保祥, 任韩. 2 类优美图[J]. 山东大学学报: 理学版, 2010, 45(10): 45 – 48.
- [11] 唐保祥, 任韩. 3 类特殊图的优美性[J]. 武汉大学学报: 理学版, 2014, 60(6): 553 – 556.

(上接第 18 页)

参考文献:

- [1] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.
- [2] LI J. Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields [J]. Int J Bifurcation and Chaos, 2003, 13: 47 – 106.
- [3] SMALE S. Mathematical problems for the next century [J]. The Mathematical Intelligence, 1998, 20: 7 – 15.
- [4] BERNARDO M, BUDD C, CHAMPNEYS A, et al. Bifurcations in nonsmooth dynamic systems [J]. SIAM Review, 2008, 50: 629 – 701.
- [5] LLIBRE J, TEIXEIRA M. Limit cycles for m -piecewise discontinuous polynomial Lienard differential equations [J]. Z Angew Math Phys, 2015, 66(1): 51 – 66.
- [6] BLOWS T, LLOYD N. The number of small-amplitude limit cycles of Lienard equations [J]. Math Proc Camb Phil Soc, 1984, 95: 359 – 366.
- [7] LLIBRE J, MEREU A, TEIXEIRA M. Limit cycles for the generalized polynomial Lienard differential equations [J]. Math Proc Camb Phil Soc, 2010, 148: 363 – 383.
- [8] MIRANDA M, MEREU A. Limit cycles in discontinuous classical Lienard equations [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2014, 20: 67 – 73.
- [9] LLIBRE J, NOVAES D, TEIXEIRA M. On the birth of limit cycles for non-smooth dynamical systems [J]. Bull Sci Math, 2015, 139: 229 – 244.
- [10] SANDERS J, VERHULST F. Averaging methods in nonlinear dynamic systems [M]. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [11] BUICA A, LLIBRE J. Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree [J]. Bull Sci Math, 2004, 128: 7 – 22.
- [12] COLL B, GASULL A, PROHENS R. Bifurcation of limit cycles from two families of centers [J]. Dyn Contin Discrete Impulse Syst, Ser A, Math Anal, 2005, 12: 275 – 287.